**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ**

**РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ДОНЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**КАФЕДРА КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ**

**Инструкции и методические указания
к выполнению лабораторных работ**

«Прикладная математика»

|  |  |
| --- | --- |
| **Укрупненная группа направлений подготовки** | 09.00.00 Информатика и вычислительная техника |
| **Программа высшего образования** | программа магистратуры |
| **Направление подготовки** | 09.04.01 Информатика и вычислительная техника |
| **Магистерская программа** | Информатика и вычислительная техникаТехнологии искусственного интеллекта |
| **Форма обучения** | очная; заочная |
| **Форма контроля** | экзамен |

Донецк 2024

Общие указания

Для лучшего понимания, что и как надо программировать, что ожидать от программы… необходимо перед началом выполнения лабораторной работы получить допуск – положительную оценку до 50% баллов от всех возможных баллов за работу. Допуск осуществляется по результатам ответов на вопросы, которые приводятся в начале каждой работы.

При сдаче отчёта по лабораторной работе необходимо объяснить сделанные выкладки, коды программы, результаты расчётов и сделать выводы.

Отчет должен содержать:

* описание задания, согласно конкретному варианту,
* описание преобразований исходного задания к математическим выражениям, которые непосредственно кодировались,
* исходный код программы вычислений,
* полученные результаты в наглядном виде (таблицы, рисунки),
* выводы о проделанной работе: получен ли результат, можно ли ему доверять, какой метод/алгоритм лучше и почему?

Допуск и сдача осуществляются на разных лабораторных занятиях. Не разрешаются допуск и сдача сразу на одной паре. Программирование математических задач требует предварительных качественных знаний в области соответствующей теории. Такие знания необходимо приобрести до начала программирования и проверить, подтвердить их в беседе с преподавателем.

Таким образом, к лабораторным работам, контрольным вопросам надо готовиться заранее дома, а в лабораториях выяснять свои вопросы, консультироваться и сдавать работы.

Программирование может осуществляться в любых средах, с использованием любых пакетов и библиотек. Можно взять в Internet сторонние коды нужных методов и модифицировать их под поставленные задачи.

Вторая и третья лабораторные работы построены на материале книги Толстых В.К. [Практическая оптимизация, идентификация распределённых систем](https://tolstykh.com/docs/%D0%9F%D1%83%D0%B1%D0%BB%D0%B8%D0%BA%D0%B0%D1%86%D0%B8%D0%B8/%D0%9F%D1%80%D0%B0%D0%BA%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B0%D1%8F%20%D0%BE%D0%BF%D1%82%D0%B8%D0%BC%D0%B8%D0%B7%D0%B0%D1%86%D0%B8%D1%8F%2C%20%D0%B8%D0%B4%D0%B5%D0%BD%D1%82%D0%B8%D1%84%D0%B8%D0%BA%D0%B0%D1%86%D0%B8%D1%8F%20%D1%80%D0%B0%D1%81%D0%BF%D1%80%D0%B5%D0%B4%D0%B5%D0%BB%D1%91%D0%BD%D0%BD%D1%8B%D1%85%20%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC.pdf). Всем, кто найдёт в монографии опечатки, ошибки, неточности, неясности… будут добавлены баллы к лабораторной работе… и даже круче – будет экзамен автоматом!

**Численные методы решения нелинейных уравнений**

Найти методом деления отрезка пополам, методом простой итерации, методом Ньютона и методом секущих хотя бы один корень нелинейного уравнения с точностью в соответствующем варианте задания. Сравнить результаты всех методов. Сделать выводы.

***Рекомендации***

Для выявления отрезка определения функции, где содержится единствен­ный корень, можно, например, воспользоваться сайтом «Построение графиков функций онлайн» - [http://yotx.ru](http://yotx.ru/). Можно взять за основу сторонние коды методов и модернизировать их для решения задачи своего варианта.

***Допуск к лабораторной работе***

Для получения допуска на выполнение (программирование) заданий лаборатор­ной работы необходимо знать ответы на все нижеприведенные контрольные вопросы.

1. Расскажите идею и покажите графически смысл работы метода деления отрезка пополам (дихотомии) для решения нелинейного уравнения.
2. Расскажите идею и покажите графически смысл работы метода простой итерации для решения нелинейного уравнения.
3. Расскажите идею и покажите графически смысл работы метода релаксации для решения нелинейного уравнения.
4. Расскажите идею и покажите графически смысл работы метода Ньютона для решения нелинейного уравнения.
5. Расскажите идею и покажите графически смысл работы метода секущих,
6. Расскажите идею работы интерполяционных методов для решения нелинейного уравнения.
7. Какие существуют подходы к решению *систем* нелинейных уравнений?

***Варианты работ***

|  |  |
| --- | --- |
| **Вариант** | **Уравнение** |
| 1 |  |
| 2 |  |
| 3 |  |
| 4 |  |
| 5 |  |
| 6 |  |
| 7 |  |
| 8 |  |
| 9 |  |
| 10 |  |
| 11 |  |
| 12 |  |
| 13 |  |
| 14 |  |
| 15 |  |

**Экстремальные задачи нелинейного программирования**

Найти хотя бы один минимум целевой функции для конечномерных управлений с точностью *ε* = 10-13 градиентным методом наискорейшего спуска и методом Ньютона. Нарисуйте приблизительные линии уровня вашей функции и полученные траектории спуска (первые три шага) к минимуму.

***Рекомендации***

В качестве теоретического материала можно использовать интернет-источники, включая Википедию, и монографию Толстых В.К. [Практическая оптимизация, идентификация распределённых систем](https://tolstykh.com/docs/%D0%9F%D1%83%D0%B1%D0%BB%D0%B8%D0%BA%D0%B0%D1%86%D0%B8%D0%B8/%D0%9F%D1%80%D0%B0%D0%BA%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B0%D1%8F%20%D0%BE%D0%BF%D1%82%D0%B8%D0%BC%D0%B8%D0%B7%D0%B0%D1%86%D0%B8%D1%8F%2C%20%D0%B8%D0%B4%D0%B5%D0%BD%D1%82%D0%B8%D1%84%D0%B8%D0%BA%D0%B0%D1%86%D0%B8%D1%8F%20%D1%80%D0%B0%D1%81%D0%BF%D1%80%D0%B5%D0%B4%D0%B5%D0%BB%D1%91%D0%BD%D0%BD%D1%8B%D1%85%20%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC.pdf) (в частности – разделы 1.3 и 2).

Для косвенной оценки близости управления к оптимуму используйте один из трёх или все указанные ниже критерии остановки итерационного процесса:

, , .

* Градиентный метод наискорейшего спуска имеет алгоритм:

, ,

Оптимальный размер шага *bk* вычисляется посредством одномерной минимизации функции методом дихотомии (бисекции) или золотого сечения на отрезке . Задайте , а для определения делайте относительно большой шаг одинаковый для всех итераций. При этом . Обращаем внимание, что найденный минимум будет достигаться именно в точке , поэтому соответствующее оптимальное число *bk* нигде далее не используется.

* Метод Ньютона:

, ,

где шаг следует находить методом Гаусса из решения линейной системы уравнений в каждой точке .

Для предварительного знакомства с методами, анализа их возможностей, устано­ви­те приложение «Optimization» с сайта В.К. Толстых [tolstykh.com/Science/Optimization](http://tolstykh.com/Science/Optimization). Задавайте различные функции[[1]](#footnote-1), методы и визуально наблюдайте спуск к минимуму на фоне линий уровня.

Для выявления приблизительной области минимизации функции и построения линий уровня, можно также воспользоваться Интернет-сайтами, например, «Построение трехмерных графиков онлайн» – <http://grafikus.ru/plot3d>. На фоне линий уровня не забудьте нанести ваши первые три шага минимизации. Если вы воспользуетесь приложением «Optimization» и добавите в него (с помощью преподавателя) свою функцию (вместе с вектором и матрицей ), то необходимый рисунок получите автоматически1.

***Допуск к лабораторной работе***

1. Сформулируйте и изобразите графически различные виды экстремумов функции, понятия выпуклых, квадратичных функций;
2. Что такое овражная функция? Нарисуйте пример её линий уровня.
3. Расскажите идею и покажите графически смысл метода бисекции для минимизации функции;
4. Расскажите идею и покажите графически смысл метода золотого сечения для минимизации функции;
5. Расскажите идею и покажите графически смысл градиентного метода для минимизации одномерной функции;
6. Расскажите идею и покажите графически смысл градиентного метода для минимизации двумерной функции;
7. Расскажите идею и покажите графически смысл метода Ньютона для минимизации одномерной функции;
8. Расскажите идею и покажите графически смысл метода Ньютона для минимизации двумерной функции;
9. Приведите примеры и поясните смысл различных критериев близости управления к оптимуму для завершения итерационных процессов.

***Варианты работ***

|  |  |
| --- | --- |
| **Вариант** | **Функция**  |
| 1 | , например, её градиент – это вектор  |
| 2 |  – Розенброк |
| 3 |  – Химмельблау 4 |
| 4 |   |
| 5 |   |
| 6 |  – Schwefel 1.2 |
| 7 |   |
| 8 |   |
| 9 |   |
| 10 |  – Химмельблау 2  |
| 11 |   |
| 12 |   |
| 13 |   |
| 14 |   |
| 15 |  – Химмельблау 28 |

**Бесконечномерные экстремальные задачи**

Найти оптимальную функцию управления , доставляющую минимум *явно* задан­ному квадратичному[[2]](#footnote-2) функционалу , с точностью ε = 10-10 методом с регули­руемым направлением спуска (МРНСг) [монография Толстых В.К. [Практическая оптимизация, идентификация распределённых систем](https://tolstykh.com/docs/%D0%9F%D1%83%D0%B1%D0%BB%D0%B8%D0%BA%D0%B0%D1%86%D0%B8%D0%B8/%D0%9F%D1%80%D0%B0%D0%BA%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B0%D1%8F%20%D0%BE%D0%BF%D1%82%D0%B8%D0%BC%D0%B8%D0%B7%D0%B0%D1%86%D0%B8%D1%8F%2C%20%D0%B8%D0%B4%D0%B5%D0%BD%D1%82%D0%B8%D1%84%D0%B8%D0%BA%D0%B0%D1%86%D0%B8%D1%8F%20%D1%80%D0%B0%D1%81%D0%BF%D1%80%D0%B5%D0%B4%D0%B5%D0%BB%D1%91%D0%BD%D0%BD%D1%8B%D1%85%20%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC.pdf)][[3]](#footnote-3) на основе градиента .

***Рекомендации***

Необходимые понятия оптимизации функционалов (бесконечномерность пространства управлений, экстремальные алгоритмы, сходимость функций к экстремуму, градиент функционала, квадратичность…) поясняются в первом разделе указанной выше монографии. Там для *неявно* заданного целевого функционала присутствует оптимизируемая система . Исключите её из рассмотрения, и у вас при определении , не будет сопряжённой переменной . Описание МРНС можно найти в разделе 3.2.

МРНСг (формула (3.4)) имеет алгоритм:

где – параметр регулирования направления спуска, – диапазон изменения . Значения функции следует находить в дискретных точках отрезка, т.е. в программе будет одномерным массивом (в точках ) с относительно большим количеством элементов по сравнению с лабораторной работой 2. Значение , и для него можно не создавать массив. Оптимальный размер шага *bk* вычисляется, как и в предыдущей работе, но в направлении . Значение функционала находится численным интегрированием, например, методом трапеций.

Решение задачи оптимизации следует начинать с параметром 𝛼=1, т.е. с тестирования ситуации посредством градиентного метода наискорейшего спуска (МНС).

Повторите решение задачи с . Для выбора задайте шаблонные приближениями из монографии, например,

* формула (3.7) – начальное приближение «под »;

***Варианты работ[[4]](#footnote-4)***

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Вариант** | **Квадратичные функционалы** |  |
| 1 |  |  |
| 2 |  |  |
| 3 |  |  |
| 4 |  |  |
| 5 |  |  |
| 6 |  |  |
| 7 |  |  |
| 8 |  |  |
| 9 |  |  |
| 10 |  |  |
| 11 |  |  |
| 12 |  |  |
| 13 |  |  |
| 14 |  |  |
| 15 |  |  |

***Допуск к лабораторной работе***

1. Что означает термин «бесконечномерное пространство» и «бесконечномерные управления»?
2. Что означает термин «распределённые системы»?
3. Что такое функционал и чем он отличается от функции?
4. Что означают символы ? Как определяется норма и скалярное произведение в ?
5. Что такое равномерная сходимость?
6. Чем отличается МРНС от градиентного метода?
7. Что такое *квадратичная* функция и функционал?
8. Где и для чего применяются задачи оптимизации? Приведите примеры и сформулируйте их в математических терминах.
9. Что такое первая вариация функционала и как она связана градиентом?
10. Перечислите наиболее популярные критерии завершения экстремальных алгоритмов оптимизации. Какой из них наиболее объективный?
11. Почему задачи оптимизации являются обратными? Зачем для их решения нужна регуляризация?

**Критерии оценивания**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Зачётные модули** | **Форма контроля, баллы** | **Итого баллы** |
| 1 | Лабораторная работа 1 | **15** |
| Лабораторная работа 2 | **25** |
| Лабораторная работа 3 | **35** |
| Контрольная работа | **10** |
|  | Экзамен | **15** |
| Общий итог |  | **100** |

1. Можно заработать дополнительно 100% баллов (к максимально возможным), если предложить свой вариант многомерной гладкой функции с её градиентом и матрицей Гессе в дополнение к набору функций в [Optimization](http://tolstykh.com/docs/%D0%9E%D0%BF%D1%82%D0%B8%D0%BC%D0%B8%D0%B7%D0%B0%D1%86%D0%B8%D1%8F/optimization.rar) [↑](#footnote-ref-1)
2. Проверить квадратичность можно так. Возьмёт три точки управления, например, u=-1, 0, 1 и найдёт J в тих точках. Значения должны лежать на выпуклой параболе  J(u). [↑](#footnote-ref-2)
3. Всем, кто найдёт в монографии опечатки, ошибки, неточности, неясности… будут добавлены баллы к лабораторной работе… и даже круче – будет экзамен автоматом! [↑](#footnote-ref-3)
4. Предложите в лабораторной работе свой квадратичный функционал. [↑](#footnote-ref-4)